UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

Capacidades de fabricación y almacenaje óptimas en un sistema con logística inversa y demanda aleatoria

Ernest Benedito, Albert Corominas.

IOC - Divisió d'Enginyeria d'Organització i Logística

IOC-DT-P-2009-02
Abril 2009

Institut d'Organització i Control
de Sistemes Industrials

Capacidades de fabricación y almacenaje óptimas en un sistema con logística inversa y demanda aleatoria

1. Introducción

La recuperación de los productos fuera de uso se ha convertido en un factor importante a tener en cuenta por la industria actual. La logística inversa proporciona herramientas para gestionar la recuperación y posterior reutilización de los productos una vez ha finalizado su vida útil y su desarrollo se está extendiendo por numerosas industrias (Díaz *et al*. 2004).

En los últimos años se han publicado numerosos artículos relacionados con la logística inversa (Rubio *et al*. 2008); entre los diferentes aspectos objeto de estudio está la determinación de políticas óptimas para la gestión de los inventarios. Fleischmann y Minner, 2003 hace una revisión de la literatura sobre modelos matemáticos de la gestión de inventarios. En este ámbito, se han establecido los cálculos de políticas óptimas de fabricación y refabricación, en sistemas aleatorios (Fleischmann and Kuik, 2003, van der Laan *et a*l., 2004, Buchanan and Abad, 1998 and Teunter, 2006) y en sistemas deterministas (Minner and Kleber (2001) and Choi *et al*. (2007).

Otro aspecto objeto de estudio, estrechamente relacionado con el anterior es la determinación de las capacidades óptimas de fabricación, refabricación y almacenaje. El cálculo de estas capacidades es distinto dependiendo del comportamiento de la demanda y de los retornos. En Rubio y Corominas (2008) se estudia un sistema con demanda determinista con capacidades de fabricación y refabricación ajustables. En Benedito y Corominas (2007) y (2008) se pone de manifiesto la influencia que tienen los retornos cuando se quiere determinar las capacidades óptimas de fabricación, refabricación y almacenaje. En el primero de ellos se estudia un sistema con demanda constante y retornos aleatorios, y en el segundo la demanda y los retornos son deterministas.

Siguiendo la línea de estos trabajos, en el presente trabajo se estudia un sistema con demanda y retornos aleatorios para calcular las capacidades óptimas de fabricación y almacenaje. El modelo presentado permite estudiar el comportamiento de las capacidades de fabricación y almacenaje óptimas cuando varían los costes de producción.

En la sección 2 se describe el sistema que se quiere estudiar, en la sección 3 se determinan las leyes de probabilidad de los retornos, se describe la forma de calcular la política de fabricación y refabricación óptima suponiendo conocidas las capacidades de fabricación y almacenaje, y se explica cómo obtener las capacidades óptimas; en la sección 4 presentan varios ejemplos numéricos y finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones y futuras líneas de continuación del trabajo.

2. Descripción de sistema

El sistema que se analiza en este trabajo está formado por una compañía que produce, vende y recupera un tipo de producto para lo cual dispone de sistemas de manufactura, remanufactura y de almacenaje de producto acabado. El sistema de remanufactura tiene capacidad suficiente para remanufacturar todo el producto retornado.

Las hipótesis del modelo son:

- Tiempo discreto con horizonte temporal ilimitado.
- La demanda es aleatoria con ley de probabilidad conocida e independiente del periodo, toma valores enteros y de valor máximo D.
- El producto remanufacturado es indistinguible del manufacturado original.
- La vida útil de un producto finaliza entre T_1 y T_2 periodos después de su venta y es aleatoria con ley independiente del periodo de venta. π_τ es la probabilidad de que la vida útil de un producto tenga una duración de τ periodos ($\tau = T_1,...T_2$). Por tanto, $\rho \cdot \pi_\tau$ es la probabilidad de que una unidad vendida en el periodo t se recupere en el periodo $t+\tau$.
- Una vez que ha finalizado la vida útil de un producto, tiene una probabilidad ρ de ser recuperado.
- La demanda que no se puede satisfacer con el producto manufacturado y remanufacturado se obtiene de un canal externo con capacidad ($T_2 - T_1$.+ 1)$\cdot D$
- Los productos manufacturados y remanufacturados en un periodo están disponibles para la venta en el mismo periodo.

Los costes de la compañía son los siguientes:

- El sistema de fabricación tiene un coste por periodo $C_p(U)$ (función que depende de la capacidad de fabricación U) y un coste μ por unidad fabricada.
- El sistema de almacenaje tiene un coste por periodo $C_s(S)$ (función que depende de la capacidad de almacenaje S).
- e: Coste unitario de desechar producto retornado.
- f: Coste de lanzamiento de pedido fabricación.
- g: Coste unitario de remanufactura.
- h: Coste de posesión de stock.
- δ: Coste unitario del canal externo.

Se supone que las funciones $C_p(U)$ y $C_s(S)$ son funciones continuas crecientes.

Se definen las siguientes variables:

s_t : Estoc disponible al final del periodo t,
u_t : Unidades manufacturadas en el periodo t.
v_t : Unidades remanufacturadas en el periodo t.
d_t: Demanda del producto en el periodo t; es una variable aleatoria entera con p_d = p($d_t = d$) ($d = 0,...,D$).
r_t : Unidades retornadas en el periodo t; es una variable aleatoria.

El orden cronológico de acontecimientos en el periodo t es el siguiente:

- Se observa el stock disponible al final del periodo anterior (s_{t-1})
- Se decide la cantidad que se quiere manufacturar (u_t) entre 0 y min(U,S-s_{t-1})
- Se satisface la demanda con la cantidad disponible en stock, la cantidad fabricada y el canal externo

– Se refabrica el producto retornado en el periodo según el siguiente criterio: si hay retornos suficientes, refabricar hasta llenar el almacén y el resto se desecha, en caso contrario se refabrica todo lo retornado

La cantidad que se compra al canal externo es $\max(0, d_t - s_{t-1} - u_t)$

La cantidad a remanufacturar es $v_t = \min(S - s'_t, r_t)$ donde $s'_t = \max(0, s_{t-1} + u_t - d_t)$ es la cantidad que queda en stock después de satisfacer la demanda

El stock al final del periodo será $s_t = s'_t + v_t$. Por tanto s_t es una variable aleatoria que depende del stock en el periodo anterior s_{t-1}, de las variables aleatorias d_t y r_t, y de la decisión u_t. Obsérvese que las variables s_t toman valores entre 0 y S.

El coste incurrido en el periodo t es:

$$c_t = C_p(U) + C_s(S) + \mu \cdot u_t + g \cdot v_t + e \cdot \max(0, r_t - v_t) + h \cdot s_t + \\ + \delta \cdot \max(0, d_t - s_{t-1} - u_t) + f \cdot \max(0, \min(1, u_t)) \qquad (1)$$

Por tanto c_t *es* una variable aleatoria que depende de las variables aleatorias s_{t-1}, s_t, d_t y r_t, de la decisión u_t, y de la capacidad de fabricación U.

3. Determinación de las capacidades óptimas de fabricación y almacenaje

Se quiere determinar las capacidades de fabricación U y de almacén S que minimicen el valor esperado del coste en un periodo. Para ello, primero se tiene que calcular la política de fabricación y refabricación óptima para cada valor de U y S; a continuación se obtienen los valores de U y S que minimizan el valor esperado del coste.

Fijados U y S, observamos que el problema de calcular la política óptima es un problema de decisión de Markov con horizonte infinito y remuneración, sin actualización, con criterio de optimización es minimizar el valor esperado de la remuneración.

El estado en el periodo t viene determinado por s_{t-1}, el espacio de estados es {0,1,…,S}, las acciones en cada periodo vienen definidas por la cantidad a manufacturar u_t, el conjunto de acciones es $\{0,1,\ldots,\min(U,S)\}$ y la remuneración está relacionada con el coste incurrido en un periodo, siendo igual a $-(c_t - C_p(U) - C_s(S))$. El signo negativo convierte la función de coste en una función de remuneración; al coste por periodo le restamos los costes de capacidad porque nos permite obtener una expresión más sencilla de la función de remuneración. Para tener definido el problema de decisión de Markov, falta determinar $p_{ij}(u)$: probabilidad de transición entre los estados i y j cuando se toma la decisión u.

En los siguientes apartados de esta sección se calculan las probabilidades de transición entre estados, a continuación se calcula la política óptima y finalmente se obtiene el valor óptimo de las capacidades.

3.1. Probabilidades de transición entre estados

En esta apartado supondremos fijados *U* y *S*.

En la sección 2 se ha visto la dependencia de la variable de estado s_t con respecto s_{t-1} y las variables aleatorias d_t y r_t. Esta dependencia puede expresarse como:

$s_t = \max(0, s_{t-1} + u_t - d_t) + \min(S - \max(0, s_{t-1} + u_t - d_t), r_t)$

Por tanto, para calcular la probabilidad de transición entre estados necesitamos calcular la distribución de probabilidad de r_t:

En primer lugar calculamos la distribución de probabilidad de Z_τ, las unidades retornadas en un periodo y que fueron vendidas τ periodos antes. Sabemos que la vida útil del producto tiene una duración aleatoria entre T_1 y T_2 y que una vez finalizada la vida útil el producto tiene una probabilidad ρ de ser retornado, por tanto, si las ventas de un periodo son *i,* la distribución de probabilidad de los retornos que originan son:

$$u_{\tau i k} = p(Z_\tau = k \mid d_t = i) = \begin{cases} \binom{i}{k}(\rho\cdot\pi_\tau)^k\left(1-\rho\cdot\pi_\tau\right)^{i-k} & k \leq i \\ 0 & k > i \end{cases}$$

Para $i = 0,...,D$ y $\tau = T_1,...T_2.$ Definimos los valores:

$$\eta_{\tau k} = p\ \ (Z_\tau = k) = \sum_{i=k}^{D} p_i \cdot u_{\tau i k} \quad \text{para } k = 0,\ldots,D \text{ y } \tau = T_1,\ldots T_2.$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la distribución de probabilidad de los retornos ya que $r_t = \sum_{\tau=T_1}^{T_2} Z_\tau$ cuya distribución de probabilidad se obtiene de las probabilidades de Z_τ, ya que $p\left(r_t = r\right) = p\left(Z_{T_1} + \cdots + Z_{T_2} = r\right)$. Por tanto,

$$q_r = p(r_t = r) = \sum_{\sum_{\tau=1}^{T_2-T_1+1} k_\tau = r} \left(\prod_{\tau=1}^{T_2-T_1+1} \eta_{T_1+\tau-1,k_\tau}\right) \quad \text{para } r = 0,\ldots,(T_2-T_1+1)\cdot D$$

Esta expresión puede calcularse haciendo la convolución de las distribuciones de probabilidad de Z_τ con la siguiente relación de recurrencia

$$f\left(r,T\right) = \sum_{k=\max\left(0,r-(T-1)\cdot D\right)}^{\min\left(r,D\right)} \eta_{T_1+T-1,k}\cdot f\left(r-k,T-1\right) \quad \text{para } T>1 \text{ y } r = 0,\ldots,T\cdot D:$$

Que nos permite calcular $q_r = f(r, T_2-T_1+1)$ partiendo de $f\left(r,1\right) = \eta_{T_1,r}$ $r = 0,\ldots,D$.

Estas probabilidades se podrían considerar directamente como datos, pero esta forma de obtenerlas es coherente y nos permitirá analizar el comportamiento del sistema para diferentes distribuciones de la demanda y de la probabilidad de retorno ρ. Sin pérdida de generalidad (porque trabajamos con horizonte ilimitado) podemos suponer $T_1 = 1$.

Finalmente ya podemos calcular $p_{ij}(u)$, la probabilidad de transición entre los estados i y j cuando se toma la decisión u, es decir $p_{ij}(u) = p(s_t = j \mid s_{t-1} = i,\ u_t = u)$ con $0 \le u \le min(U,S - i)$ que la calculamos con:

$$p_{ij}(u) = \sum_{(d,r)\in\Omega_{i+u,j}} p(d_t = d)p(r_t = r)$$

Donde los dominios $\Omega_{i+u,j}$ contienen los valores (d,r) tales que partiendo del estado i, tomando la decisión u, se pasa al estado j, es decir, si hacemos $k = i+u$, los definimos de la siguiente manera:

$$\Omega_{k,j} = \left\{(d,r)\in[0,D]\times[0,R] \mid j = max(0,k - d) + min\left(S - max(0,k - d),r\right)\right\}$$

Para $0 \le k \le U + S$ y $0 \le j \le S$. Para calcular los dominios $\Omega_{i+u,j}$ distinguimos 3 casos:

Caso 1: $j < S$ y $j \le i+u$

$$\Omega_{i+u,j} = \left\{(d,j) \mid i+u \le d \le D\right\} \cup \left\{ (r - j + i + u,r) \mid 0 \le r \le min\left(j - 1,D + j - (i+u)\right)\right\}$$

Caso 2: $j < S$ y $j > i + u$

$$\Omega_{i+u,j} = \left\{(d,j) \mid i+u \le d \le D\right\} \cup \left\{(r - j + i + u,r) \mid j - i - u \le r \le min\left(j - 1,D + j - (i+u)\right)\right\}$$

Caso 3: $j = S$

$$\Omega_{i+u,j} = \left\{(d,r) \mid i+u \le d \le D, S \le r \le R\right\} \cup \left\{(d,r) \mid 0 \le d \le \min\left(D,i+u-1\right), S+d-i-u \le r \le R\right\}$$

Donde $R = (T_2-T_1+1)\cdot D$. Por tanto:

$$p_{ij}(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D} p(d_t = d)\cdot p(r_t = j) + \sum_{r=0}^{min(j-1,D+j-(i+u))} p(d_t = i+u-j+r)\cdot p(r_t = r) & j < S \quad j \le i+u \le S \\ \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D} p(d_t = d)\cdot p(r_t = j) + \sum_{r=j-(i+u)}^{min(j-1,D+j-(i+u))} p(d_t = i+u-j+r)\cdot p(r_t = r) & j < S \quad j > i+u \\ \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D}\sum_{r=S}^{R} p(d_t = d)\cdot p(r_t = r) + \sum_{k=S-(i+u)}^{min(S-1,D+S-(i+u))} p(d_t = i+u-S+k)\cdot p(r_t \,{}^3\, k) & j = S \quad i+u \le S \end{cases}$$

Es decir:

$$p_{ij}(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D} p_d q_j + \sum_{r=0}^{min(j-1,D+j-(i+u))} p_{i+u-j+r}\cdot q_r & j < S \quad j \le i+u \le S \\ \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D} p_d q_j + \sum_{r=j-(i+u)}^{min(j-1,D+j-(i+u))} p_{i+u-j+r}\cdot q_r & j < S \quad j > i+u \\ \displaystyle\sum_{d=i+u}^{D} p_d \sum_{r=S}^{R} q_r + \sum_{k=S-(i+u)}^{min(S-1,D+S-(i+u))} p_{i+u-S+k}\cdot\sum_{r=k}^{R} q_r & j = S \quad i+u \le S \end{cases}$$

Obsérvese que $p_{ij}(u)$ es igual a $p\left((d,r)\in\Omega_{i+u,j}\right)$, probabilidad de que $(d,r)\in\Omega_{i+u,j}$.

3.2. Cálculo de la política de fabricación óptima

Los costes de transición entre estados serán la esperanza matemática de los costes correspondientes a cada una de las trayectorias posibles para hacer la transición.

Dadas unas capacidades de fabricación *U* y de almacén *S*, queremos calcular $c_{ij}(u)$: coste esperado de pasar del estado *i* al *j* cuando se toma la decisión *u*, es decir $c_{ij}(u) = E(c \mid i,j,u)$ donde $c = c_t - C_p(U) - C_s(S)$. Definiendo

$$c(i,j,u,d,r) = \mu\cdot u + g\cdot \min(S - \max(0, i+u-d), r) + e\cdot\max(0, r - v_t) + h\cdot j + \delta\cdot\max(0, d-i-u) + f\cdot\max(0, \min(1, u))$$

$$c_{ij}(u) = \sum_{(d,r)\in\Omega_{i+u,j}} c(i,j,u,d,r)p\left(d,r \mid (d,r)\in\Omega_{i+u,j}\right) = \sum_{(d,r)\in\Omega_{i+u,j}} c(i,j,u,d,r)\frac{p(d_t=d)p\left(r_t=r\right)}{p\left((d,r)\in\Omega_{i+u,j}\right)}$$

Por tanto,

$$c_{ij}(u)\cdot p_{ij}(u) = \sum_{(d,r)\in\Omega_{i+u,j}} c(i,j,u,d,r)p(d_t=d)p\left(r_t=r\right)$$

Distinguiremos 3 casos:

Caso 1a: $j < S$ y $j \le i+u$:

$$c_{ij}(u)\cdot p_{ij}(u) = \sum_{r=0}^{\min(j-1,D+j-(i+u))}\left[\mu\cdot u + g\cdot r + h\cdot j + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_{i+u-j+r}\cdot q_r +$$
$$+\sum_{d=i+u}^{D}\left[\mu\cdot u + g\cdot j + h\cdot j + \delta\cdot\left(d-i-u\right) + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_d\cdot q_j$$

Caso 1b: $j < S$ y $j > i+u$:

$$c_{ij}(u)\cdot p_{ij}(u) = \sum_{r=j-(i+u)}^{\min(j-1,D+j-(i+u))}\left[\mu\cdot u + g\cdot r + h\cdot j + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_{i+u-j+r}\cdot q_r +$$
$$+\sum_{d=i+u}^{D}\left[\mu\cdot u + g\cdot j + h\cdot j + \delta\cdot\left(d-i-u\right) + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_d\cdot q_j$$

Caso 2: $j = S$

$$c_{ij}(u)\cdot p_{ij}(u) = \sum_{k=S-(i+u)}^{\min(S-1,D+S-(i+u))}\sum_{r=k}^{R}\left[\mu\cdot u + g\cdot\left(k\right) + e\cdot\left(r-k\right) + h\cdot S + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_{i+u-S+k}\cdot q_r$$
$$+\sum_{d=i+u}^{D}\sum_{r=S}^{R}\left[\mu\cdot u + g\cdot S + e\cdot\left(r-S\right) + h\cdot S + \delta\cdot\left(d-i-u\right) + f\cdot \max\left(0,\min\left(1,u\right)\right)\right]\cdot p_d\cdot q_r$$

Para cada capacidad de manufactura *U* y de almacén *S*, la política óptima se calcula resolviendo el siguiente programa lineal (Putterman, 1994, pág 391 y siguientes):

$$[\text{MIN}] \quad \sum_{i=0}^{S}\sum_{u=0}^{U_i} c_i(u)\cdot y_{i,u}$$

s.a:

$$\sum_{u=0}^{U_i} y_{i,u} - \sum_{j=0}^{S}\sum_{u=0}^{U_j} p_{ji}(u)\cdot y_{j,u} = 0 \qquad i = 0,\ldots,S$$
$$\sum_{i=0}^{S}\sum_{u=0}^{U_i} y_{i,u} = 1$$
$$y_{i,u} \geq 0 \qquad i = 0,\ldots,S, \quad u=0,\ldots,U_i$$

Donde U_i = min(U,S-i), $y_{i,u}$ son las variables y $c_i(u)$ es:

$$c_i(u) = \sum_{j=0}^{S} p_{ij}(u)\cdot c_{ij}(u)$$

Si $y^*_{i,u}$ es una solución óptima básica del programa lineal anterior, entonces la política optima en el estado i será manufacturar u si $y^*_{i,u} > 0$ y

$$\sum_{i=0}^{S}\sum_{u=0}^{U_i} c_i(u)\cdot y^*_{i,u}$$

Es el valor esperado del coste al aplicar la política óptima anterior. Por tanto, el valor esperado del coste incurrido en un periodo, cuando se aplica la política óptima es:

$$C_O(U,S) = C_p(U) + C_s(S) + \sum_{i=0}^{S}\sum_{u=0}^{U_i} c_i(u)\cdot y^*_{i,u}$$

3.3. Cálculo de las capacidades óptimas

En el apartado anterior se ha descrito la forma de calcular la política óptima y obtener el valor esperado del coste al aplicar dicha política cuando están fijadas las capacidades de fabricación U y de almacén S. También se ha definido la función $C_O(U,S)$ que en cada punto (U,S) toma el valor esperado del coste al aplicar la política óptima cuando la capacidad de fabricación es U y la de almacén es S. La capacidades óptimas serán aquellas que minimizan la función $C_O(U,S)$.

En la sección 2 se ha visto que la cantidad que se manufactura en cada periodo u_t está entre 0 y min(U,S-s_{t-1}) por tanto siempre será $u_t \leq S$. Dado que $C_p(U)$ es una función creciente, el óptimo se alcanza para un valor de $U \leq S$.

Veamos que S^*, valor óptimo de la capacidad de almacén, es acotado. De (1) sabemos que

$$C_s(S) \leq C_o(U,S) \quad \forall U,S$$

En particular, para las capacidades de fabricación y de almacén óptimas (U^* y S^* respectivamente),

$$C_s(S^*) \leq C_o(U^*,S^*)$$

Calculamos $C_O(U_0,S_0)$ para algún (U_0,S_0) (por ejemplo (0,0)) y calculamos S_{MAX} tal que $C_s(S_{\mathrm{MAX}}) = C_O(U_0,S_0)$. S_{MAX} existe ya que $C_s(S)$ alcanzará el valor $C_o(U_0,S_0)$; en caso contrario significaría que $C_s(S)$ es una función acotada, pero los costes de capacidad de almacén no pueden estar acotados si aumentamos indefinidamente la capacidad.

Entonces se tiene

$$C_s\left(S^*\right) \le C_o\left(U^*, S^*\right) \le C_o\left(U_0, S_0\right) = C_s\left(S_{MAX}\right)$$

Y por tanto $S^* \le S_{MAX}$ ya que $C_s(S)$ es un función creciente.

4. Ejemplos numéricos

4.1. Ejemplo numérico 1

Se quiere determinar la capacidad de fabricación y almacenaje para un sistema con los siguientes valores de los parámetros:

D = 5; p_0=0,1, p_1=0,15, p_2=0,25, p_3=0,25, p_4=0,15, p_5=0,1
ρ = 0,3; T_1=1, T_2=3; π_1=0,25, π_2=0,50, π_3=0,25
μ=10, e=1, f=0.5, g=5, h=1, δ=30, $C_p(U) = 10\cdot\sqrt{U}$, $C_S(S) = 2\cdot\sqrt{S}$

Tal y como se ha explicado en las secciones precedentes, para cada valor de las capacidades de fabricación U y almacenaje S, se calcula la política óptima.

En la figura 1 se muestra la distribución de probabilidad de los retornos en un periodo. En la tabla 1 se muestran las políticas óptimas y el coste asociado para cada valor de la capacidad de fabricación para S = 6. Obsérvese que cuando el sistema se encuentra en el estado i = 6, no se fabrica ya que, en este caso la cantidad máxima que se puede fabricar, U_6,es 0.

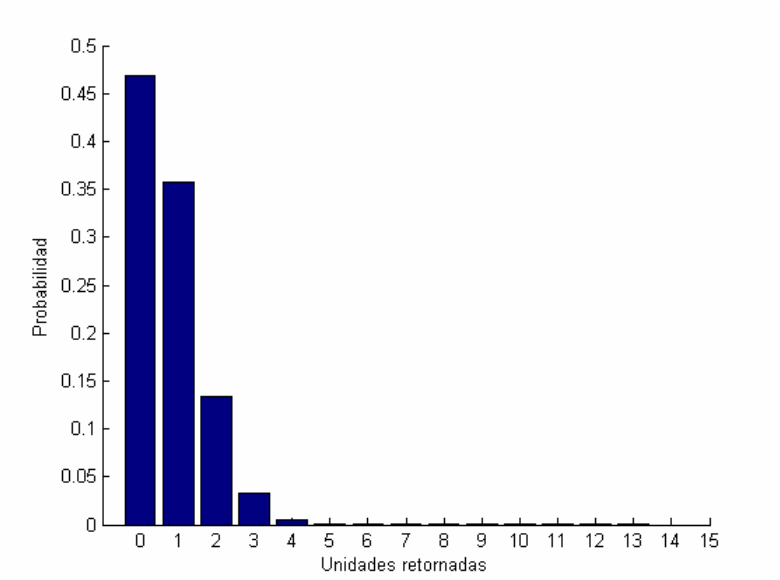

Fig. 1 Distribución de probabilidad de las unidades retornadas en un periodo utilizando la distribución de demanda y ρ = 0,3 del ejemplo 4.1.

Capacidad de Fabricación	Estado							Costes
	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	0	62,092
1	1	1	1	1	1	1	0	53,910
2	2	2	2	2	2	1	0	47,124
3	3	3	3	2	1	0	0	47,847
4	4	4	3	2	1	0	0	50,122
5	5	4	3	2	1	0	0	52,440
6	5	4	3	2	1	0	0	54,574

Tabla 1. Política óptima para diferentes capacidades de fabricación cuando la capacidad de almacén es S = 6

El coste es mínimo es 47,124, y se da cuando la capacidad de fabricación es 2.

Realizando el cálculo de las políticas óptimas para diferentes valores de *S* y *U* se obtienen los costes de producción. En la tabla 2 se muestran los costes para diferentes valores de las capacidades de fabricación y de almacén.

		Capacidad del almacén								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Capacidad de fabricación	0	75,750	65,275	61,766	61,137	61,320	61,693	62,092	62,476	62,839
	1		67,673	58,689	55,384	54,227	53,889	53,910	54,091	54,345
	2			57,378	50,875	48,272	47,252	47,124	47,311	47,574
	3				51,629	48,425	47,716	47,847	48,149	48,491
	4					50,590	49,999	50,122	50,418	50,758
	5						52,323	52,440	52,733	53,072
	6							54,574	54,867	55,206
	7								56,830	57,169
	8									58,996

Tabla 2. Costes de producción para diferentes valores de *S* y *U*.

Observamos que el coste mínimo se alcanza cuando *U* = 2 y *S* = 6.

4.2. Ejemplo numérico 2

Estudiamos las capacidades de almacén y de fabricación óptimas y el coste óptimo cuando varía la probabilidad de retorno ρ.

Los parámetros utilizados son los siguientes:

$D = 10$; $p = (0, 0, 0, 0, 0.1, 0.15, 0.25, 0.25, 0.15, 0.1)$
$T_1 = 1$, $T_2 = 3$; $\pi = (0.25, 0.50, 0.25)$
$\mu = 10$, $e=1$, $f=40$, $g=5$, $h=1$, $\delta=30$
$C_p(U) = 10 \cdot \sqrt{U}$, $C_S(S) = 2 \cdot \sqrt{S}$

En la tabla 3 y la figuras 2 y 3 se muestran los resultados obtenidos.

ρ	S^*	U^*	Coste
0,0	18	12	149,99
0,1	17	11	144,44
0,2	17	10	138,66
0,3	17	10	132,67
0,4	16	9	126,38
0,5	15	8	119,82
0,6	14	7	112,97
0,7	14	6	105,77
0,8	13	0	89,94
0,9	16	0	75,09
1,0	16	0	65,29

Tabla 3. Valores de las capacidad de producción (U^*) capacidad de almacén (S^*) y costes óptimos ($C_O(U^*,S^*)$) para diferentes valores de la probabilidad de retorno ρ.

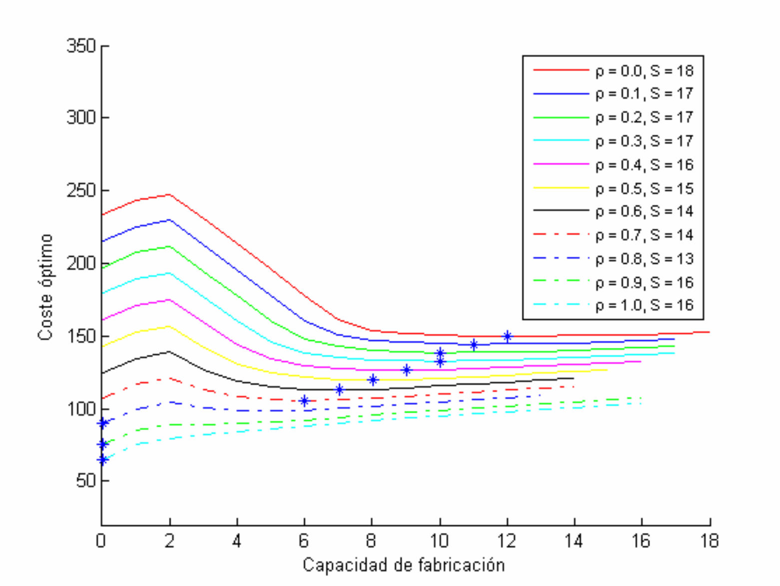

Fig. 2. Gráfico del valor esperado del coste cuando se utiliza una política óptima vs capacidad de fabricación, para diferentes valores de ρ y S. Para cada ρ, el valor de S utilizado es el que proporciona el valor óptimo. Los asteriscos corresponden al coste óptimo.

Observaciones:

En todos los casos, la capacidad de almacén ópitma es superior a la demanda.
Para valores de ρ próximos a 1, la capacidad de fabricación óptima es 0. Es decir, la demanda se satisface con los retorno y el canal externo.

Para valores de ρ próximos a 0, la capacidad de fabricación óptima es superior a la demanda máxima. Esto significa que en algunos periodos es rentable producir por encima de la demanda y almacenar el excedente. Esto es debido a que los costes de lanzamiento de pedido (f = 40) y los costes del canal externo (δ = 30) son relativamente altos en comparación con los costes de fabricación (μ = 10) y almacenaje (h = 5).

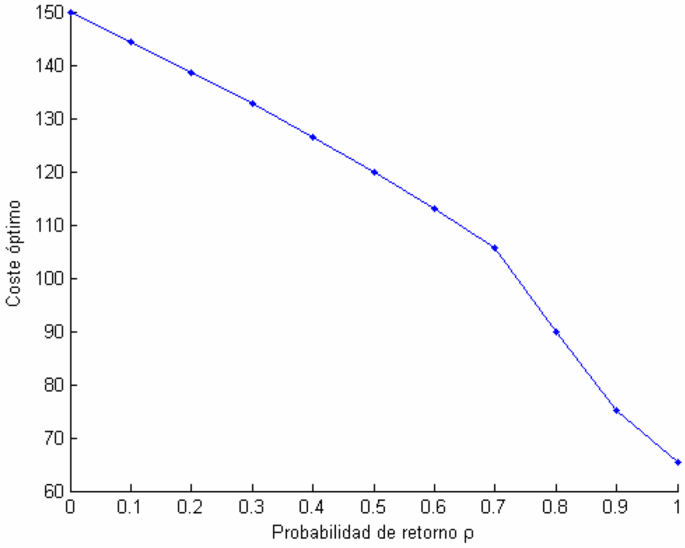

Fig. 3. Gráfico del valor esperado del coste vs probabilidad de retorno ρ, cuando se utiliza la política óptima y capacidades de fabricación y de almacén óptimas.

El coste óptimo se alcanza cuando ρ = 1, S = 16, U = 0. La razón de este comportamiento extremo es que, en este ejemplo, los costes relacionados con los retornos (e y g) son muy inferiores a los relacionados con la faricación (μ, f, δ).

4.3. Ejemplo numérico 3

Estudiamos el coste óptimo cuando varía el coste de remanufactura g y la probabilidad de retorno ρ.

Los parámetros utilizados son los siguientes:

D = 10; p = (0, 0, 0, 0, 0.1, 0.15, 0.25, 0.25, 0.15, 0.1)
T_1=1, T_2=3; π = (0.25, 0.50, 0.25)
μ = 10, e=10, f=40 , h=5, δ=30
$C_p(U) = \sqrt{U}$, $C_S(S) = 2 \cdot \sqrt{S}$

En la tabla 4 y en la figura 3 se muestran los resultados obtenidos para valores de g entre 5 y 10. Obsérvese que para valores de g próximos a μ (g = 9, 10) los costes óptimos se dan cuando no hay retornos y para el resto de valores de g inferiores a 8 el óptimo es cuando ρ = 1.

ρ	$g = 5$			$g = 6$			$g = 7$			$g = 8$			$g = 9$			$g = 10$		
	S^*	U^*	Coste	S^*	U^*	Coste	S^*	U^*	Coste	S^*	U^*	Coste	S^*	U^*	Coste	S^*	U^*	Coste
0,0	9	9	134,0	9	9	134,0	9	9	134,0	9	9	134,0	9	9	134,0	9	9	134,0
0,1	15	14	133,5	15	14	134,2	15	14	135,0	15	14	135,7	15	14	136,5	15	14	137,2
0,2	14	13	131,0	14	13	132,5	14	13	134,0	14	13	135,5	14	13	137,0	14	13	138,5
0,3	13	11	128,2	13	11	130,4	13	11	132,7	13	11	134,9	13	11	137,2	13	11	139,4
0,4	12	9	125,0	12	9	128,0	12	9	131,0	12	9	134,0	12	9	137,0	12	9	140,0
0,5	12	9	121,6	12	9	125,4	12	9	129,1	12	9	132,8	12	9	136,5	12	9	140,3
0,6	12	8	118,1	12	8	122,6	11	8	127,0	11	8	131,5	11	8	135,9	11	8	140,3
0,7	12	7	114,3	12	7	119,6	11	7	124,7	11	7	129,9	11	7	135,1	11	7	140,3
0,8	12	6	110,9	12	6	116,8	12	6	122,7	11	6	128,6	11	6	134,4	11	6	140,2
0,9	11	5	108,7	11	5	115,2	11	5	121,6	11	5	128,1	11	5	134,5	10	5	140,9
1,0	11	0	107,7	11	0	114,6	10	0	121,6	10	0	128,4	10	0	135,2	10	0	142,1

Tabla 4. Valores de las capacidad de producción (U^*) capacidad de almacén (S^*) y costes óptimos ($C_O(U^*,S^*)$) para diferentes valores del coste de remanufactura g y de la probabilidad de retorno ρ

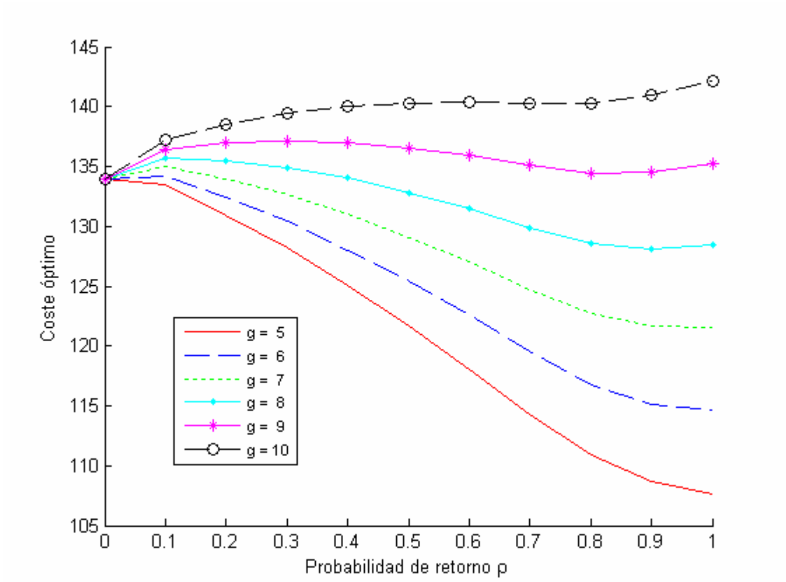

Fig. 3 Gráfico del valor esperado del coste vs probabilidad de retorno ρ, cuando se utiliza la política óptima y capacidades de fabricación y de almacén óptimas para diferentes valores de g.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado un modelo de un sistema con demanda aleatoria con retornos que se calculan a partir de la demanda, del ciclo de vida del producto y de la probabilidad de que el producto sea retornado una vez ha finallizado su vida útil. De este modo se puede analizar el comportamiento del sistema para diferentes tasas de retorno y de ciclo de vida.

También hemos presentado una forma de calcular la política de fabricación óptima cuando las capacidades de fabricación y almacenaje están fijadas y son limitadas. Gracias a ello, se pueden calcular las políticas de fabricación y almacenaje óptimas.

En la sección 4 hemos mostrado la utilidad del modelo para realizar estudios sobre capacidades óptimas cuando varían los parámetros del modelo. En el ejemplo 4.2 se ha visto como evolucionan los costes al variar la probabilidad de retorno y en el ejemplo 5 se puede ver la sensibilidad de los costes óptimos respecto de los costes de refabricación y la tasa de retorno.

La flexibilidad del modelo puede ser útil para abordar futuros trabajos relacionados con los sistemas con logística inversa. Por ejemplo, se puede extender el modelo para estudiar un sistema donde la probabilidad de retorno sea variable con un coste asociado, es decir, el caso de una compañía con capacidad de influir en la tasa de retorno.

Referencias

Benedito, E.; Corominas, A. (2007). Cálculo de la capacidad de fabricación y refabricación óptima para sistemas con logística inversa y demanda determinista constante. Proceedings CIO 2007, 1335-1342.

Benedito, E.; Corominas, A. (2008). Determinación de las capacidades de fabricación y almacenaje en un sistema con logística inversa y demanda periódica. Working Paper. IOC-DT-P-2008-08.

Buchanan, D. J., Abad, P. L. 1998. Optimal policy for periodic review returnable inventory system. *IIE Transactions*, 30, 1049-1055.

Choi, D.-W., Hwan, H., Kho, S.-G. 2007. A generalized ordering and recovery policy for reusable items. *European Journal of Operational Research*, 182, 764-774.

Díaz, A., Alvarez, M. J., González, P. 2004. Logística inversa y Medio Ambiente. McGraw Hill/Interamericana de España, S.a.U.

Fleischmann, M., Kuik, R. 2003. Optimal inventory control with independent stochastic item returns. *European Journal of Operational Research*, 151, 25-37.

Fleischmann, M., Minner, S. 2003. Inventory Management in Closed Loop Supply Chains. In: Dyckhoff, H., Lackes, R., Reese, J. Supply Chain Management and Reverse Logistics, Berlin Heidelberg New York: Springer.

Minner, S., Kleber, R. 2001. Optimal control of production and remanufacturing in a simple recovery model with linear cost functions. *OR Spektrum*, 23, 3-24.

Putterman, M. L. 1994. Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming. New York [etc.] : John Wiley & Sons, cop. 1994

Rubio, S., Chamorro, A., Miranda, F. J. 2008. Characteristics of the research on reverse logistics (1995-2005). *International Journal of Production Research*, 46 (4), 1099-1120.

Rubio, S., Corominas, A. 2008. Optimal manufacturing-remanufacturing policies in a lean production environment. *Computers & Industrial Engineering*, 55, 234-242.

Teunter, R. H. 2006. Determining optimal disassembly and recovery strategies. Omega. *The International Journal of Management Science*, 34, 533-537.

van der Laan, E. A., Kiesmüller, G., Kuik, R., Vlachos, D., Dekker, R. 2004. Stochastic Inventory Control for Product Recovery. In: Dekker, R., Fleischmann, M., Inderfurth, K. Reverse Logistics – Quantitative models for Closed-Loop Supply Chains, Springer.

Werra, D. de, Lieblin, T. M., Hêche, J.-F. 2003. Recherche opérationnelle pour ingénieurs. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, cop. 2003